Samenvatting wiskunde h4 hoofdstuk 3 en 6, h5 hoofdstuk 4 en 6

Hoofdstuk 3 machtsfuncties

Voorkennis

- Bij het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels:
  - Bij een vermenigvuldiging van twee machten met hetzelfde grondtal geldt $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$
  - Bij het machtsverheffen van een macht geldt $(g^a)^b = g^{a \times b}$
- Je kunt de rekenregels van machten gebruiken om functievoorschriften te vereenvoudigen
- $\sqrt{a}$ heet de wortel van a en er geldt $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt[3]{c}$ heet de derdemachtswortel van c. er geldt $(\sqrt[3]{c})^3 = c$

3-1 rekenregels voor machten

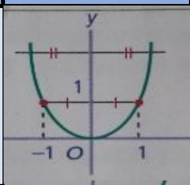
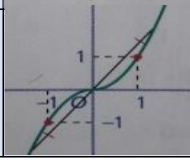
- Voor het rekenen met machten kun je gebruik maken van de volgende rekenregels:
  - $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$ en $(g^a)^b = g^{a \times b}$
  - $\frac{g^a}{g^b} = g^{a-b}$ $(g \neq 0)$
  - $g^0 = 1$ $(g \neq 0)$
  - $g^{-n} = \frac{1}{g^n}$ $(g \neq 0$ en n een heel getal$)$
- Voor het rekenen met machten geldt ook
  - $(p \cdot q)^a = p^a \cdot q^a$
  - $(\frac{p}{q})^a = \frac{p^a}{q^a}$ $(q \neq 0)$

3-2 gebroken exponenten

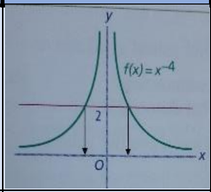
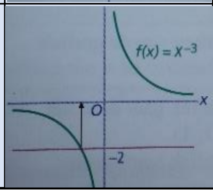
- Er geldt $g^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{g}$
- Er geldt $g^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{g^m}$, met n en m positieve gehele getallen

3-3 machtsfuncties en gehele exponenten

- Functies van de vorm $f(x) = x^a$ heten machtsfuncties
- De eigenschappen van grafieken van $f(x) = x^a$ met a een positief geheel getal staan in het overzicht hieronder:

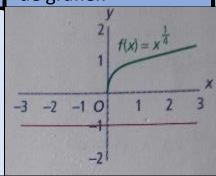
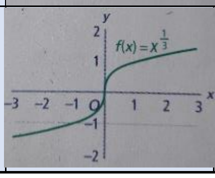
Machtsfuncties van de vorm $f(x)=x^a$	Algemene vorm van de grafiek	Kenmerken van de grafieken	Aantal oplossingen van de vergelijking $f(x) = c$
a is even, bijvoorbeeld $f(x)=x^6$		-de grafiek gaat door de punten (-1,1), (0,0) en (1,1) -de grafiek is lijnsymmetrisch in de y-as	2 oplossingen als $c > 0$ 1 oplossing als $c = 0$ 0 oplossingen als $c < 0$
a is oneven, bijvoorbeeld $f(x)=x^7$		-de grafiek gaat door de punten (-1,-1), (0,0) en (1,1) -de grafiek is puntsymmetrisch in het punt (0,0)	Altijd één oplossing

- Machtsfuncties van de vorm $f(x) = x^{-n}$ kun je schrijven als $\frac{1}{x^n}$ met n een positief getal
- Deze machtsfuncties zijn voorbeelden van gebroken functie
- De eigenschappen van de grafieken $f(x) = x^{-n}$ met n een positief geheel getal staan in het overzicht hieronder

	Algemene vorm van de grafiek	Kenmerken van de grafieken	Aantal oplossingen van de vergelijking f(x) = c
n is even, bijvoorbeeld f(x) = $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$		-de grafek gaat door de punten (1,1), (-1,1) -de grafiek is lijnsymmetrisch in de y-as -de x-as is horizontale asymptoot en de y-as is verticale asymptoot	2 oplossingen als c > 0 0 oplossingen als c $\leq$ 0
n is oneven, bijvoorbeeld f(x) = $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$		-de grafiek gaat door de punten (1,1), (-1,-1) -de grafiek is puntsymmetrisch in (0,0) -de x-as is horizontale asymptoot en de y-as is verticale asymptoot	Altijd één oplossing, c $\neq$ 0

3-4 machtsfuncties met gebroken exponenten

- Machtsfuncties van de vorm f(x) = $x^{\frac{1}{n}}$ met n een positief geheel getal zijn te schrijven als f(x) = $\sqrt[n]{x}$ en heten daarom ook wel wortelfuncties
- Als n even is, is het domein [0,→⟩
- Als n oneven is, is het domein ℝ
- De eigenschappen van de grafieken van f(x) = $x^{\frac{1}{n}}$ met een positief geheel getal staan in het overzicht hieronder

	Algemene vorm van de grafiek	Kenmerken van de grafieken	Aantal oplossingen van de vergelijking f(x) = c
n is even, bijvoorbeeld f(x) = $x^{\frac{1}{4}}$ zowel het domein als het beriek van f is [0,→⟩		-de grafiek gaat door het punt (1,1) -de grafiek heeft geen symmetrie	1 oplossing als c $\geq$ 0 0 oplossingen als c < 0
n is oneven, bijvoorbeeld f(x) = $x^{\frac{1}{3}}$ zowel het domein als het bereik van f is ℝ		-de grafiek gaat door de punten (1,1) en (-1,1) -de grafiek is puntsymmetrisch	Altijd één oplossing

3-5 Vergelijkingen oplossen

- Voor positieve gehele waarden van n geldt
- De exacte oplossing van x^n = c is $\sqrt[n]{c}$ als n oneven is
- De exacte oplossingen van x^n = c zijn x = $\sqrt[n]{c}$ en x = -$\sqrt[n]{c}$ als n even is en c $\geq$ 0
- X^n = c heeft geen oplossing als n even is en c < 0
- Bij vergelijkingen van de vorm x^a = c met a niet een geheel getal, ga je eerst met een plot na hoeveel oplossingen er zijn
- Als er één of meer oplossingen zijn, los je de vergelijking exact op door links en rechts van het = - teken tot dezelfde macht te verheffen zodat x^1 ontstaat
- X^a = c geeft $(x^a)^{\frac{1}{a}}$ en hieruit volgt x = $c^{\frac{1}{a}}$
- Als er een twee oplossingen is, is dit x = -$c^{\frac{1}{a}}$

Hoofdstuk 6 afgeleide functies

Voorkennis

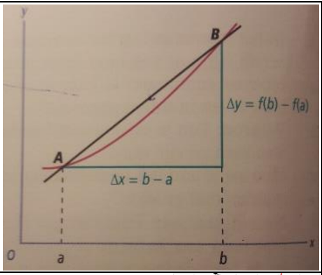
- Lineaire formules zijn te schrijven in de vorm y = ax + b
- b = startgetal (0,b) en a = richtingscoëfficiënt

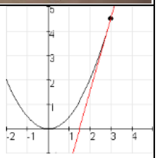
6-1 toename-diagrammen

- Staafjes omhoog = toename
- Staafjes omlaag = afname

6-2 gemiddelde verandering

- Het symbool delta (Δ) wordt gebruikt om een verandering aan te geven

	 • Verandering functie *f* is: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ • Het differentiequotiënt van f over het interval [a,b,] is: - De gemiddelde verandering van de functie over dat interval - De richtingscoëfficiënt van de lijn door het beginpunt en het eindpunt op dat interval

6-3 hellingen benaderen	
	• De helling van een grafiek in een punt *P* is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn die de grafiek raakt in punt *P*
	• Deze lijn heet de raaklijn
	• De mate van verandering op een bepaald moment kun je benaderen door de gemiddelde verandering over een klein interval te berekenen
	  ○ Hoe kleiner het interval, hoe nauwkeuriger de benadering
	  ○ Vb: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2{,}001) - h(2)}{2{,}001-2} = \frac{50{,}009995-50}{0{,}001}$ = 9,995

6-4 differentiaal-quotiënten	• Als je het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ over steeds kleiner wordende intervallen uitrekent (waarbij dus Δx nadert naar nul), naderen de uitkomsten naar een waarde ○ Deze waarde noem je het differentiaalquotiënt ($\frac{dy}{dx}$) Voorbeeld: Gegeven *f(x)* = 1,3x^4. Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor x = 2 Oplossing: Op [2;2,02] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1{,}3\times 2{,}01^4 - 1{,}3\times 2^4}{0{,}01} \approx$ 41,913 Op [2;2,02] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$41,631 Op [2;2,02] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx$41,603 Uitkomst: naderen naar 41,6 dus $\frac{dy}{dx}$ = 41,6
6-5 de afgeleide functie	• Bij een functie *f* hoort vaak een tweede functie waarmee je de helling in een punt van de grafiek van *f* exact kunt berekenen • Deze functie heet de afgeleide functie van *f* • De afgeleide functie geef je aan met ***f'*** • De afgeleide reken je uit met de formule *f'*(x) = ax^{a-1} • Vb: *f*(x) = x^5 dus *f'*(x) = $5x^4$

6-6 regels voor differentiëren	- Als je een functie met een ***constante vermenigvuldigt***, dan moet je de afgeleide functie met dezelfde constante vermenigvuldigen
	  ○ Vb: *g*(x) = *c* × *f(x)* → *g'*(x) = *c* × *f'*(x)
	- Als je bij een functie met een ***constante optelt*** blijft de afgeleide functie dezelfde
	  ○ Vb: *g*(x) = *f(x)* + *c* → *g'*(x) = *f'(x)*
	- Als je twee functies bij elkaar optelt, dan moet je de afgeleide functies ook bij elkaar optellen (***somregel***)
	  ○ Vb: *s(x)* = *f(x)* + *g(x)* → *s'(x)* = *f'(x)* + *g'(x)*

Hoofdstuk 4 differentiëren	
4-1 machtsfuncties differentiëren	• Wortelfuncties zijn ook machtsfuncties • Om een wortelfunctie te differentiëren moet je deze eerst in de vorm *f(x)* = *c* × x^n schrijven Vb: *f(x)* = $\sqrt{x}$ → *f(x)* = $x^{\frac{1}{2}}$ dus *f'(x)* = $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ → *f'(x)* = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
4-2 de kettingregel	• Een functie waarin twee of meer functies na elkaar worden toegepast heet een kettingfunctie of samengestelde functie Vb: *k(x)* = $(\frac{1}{4}x - 6)^3$ → *g(t)* = t^3 dus *g'* = $3t^2$ dus *k'*(x) = $3(\frac{1}{4}x - 6)^2 \times \frac{1}{4}$ Dus $\frac{3}{4}(\frac{1}{4}x - 6)^2$

<table>
<tr><td>4-3 raaklijnen</td><td>

- Hoe stel je een vergelijking van de raaklijn op in een punt *P* van de grafiek?
1. Bereken indien nodig de coördinaten van het raakpunt *P*
2. Bereken de helling *a* van de grafiek in punt *P*
3. Vul bij de vergelijking $y = ax + b$ de coördinaten van *P* in en bereken de waarde van *b*
4. Schrijf de vergelijking van de raaklijn op

- Hoe bereken je de waarde(n) van *P* waarvoor de lijn $y = ax + p$ de grafiek van *f* raakt?
1. Bereken de coördinaten van het raakpunt *P* waarvoor geldt $f'(x) = a$
2. Vul bij de vergelijking $y = ax + p$ de coördinaten van het raakpunt in en los de ontstane vergelijking op
- Een lijn is een raaklijn als $f(x) = l(x)$ en $f'(x) = l'(x)$

</td></tr>
<tr><td>4-4 maxima en minima</td><td>

- Bij de *x*-waarden waar $f'(x)$ negatief is, daalt de grafiek van *f*
- Bij de *x*-waarden waar $f'(x)$ positief is, stijgt de grafiek van *f*
- Bij de *x*-waarden waar $f'(x)$ gelijk is aan 0, loopt de raaklijn van *f* horizontaal
- Als de grafiek van *f* bij $x = a$ overgaat van stijgen in dalen, heeft *f* een maximum dat gelijk is aan $f(a)$
- Als de grafiek van *f* bij $x = a$ overgaat van dalen in stijgen, heeft *f* een minimum dat gelijk is aan $f(a)$
- De minima en maxima worden ook wel extreme waarden genoemd

Hoe bereken je de maxima en de minima?:
1. Bereken $f'(x)$
2. Los op $f'(x) = 0$
3. Ga met een plot na of de grafiek van *f* bij de oplossingen van $f'(x) = 0$ een top heeft
4. Bereken de *y*-coördinaat van een eventuele top. Geef aan of het een maximum of een minimum betreft

</td></tr>
<tr><td>4-5 redeneren met de afgeleide</td><td>

- Toenemend stijgend: $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt toe
- Afnemend stijgend: $f'(x) > 0$ en $f'(x)$ neemt af
- Afnemend dalend: $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt toe
- Toenemend dalend: $f'(x) < 0$ en $f'(x)$ neemt af

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hoofdstuk 6 verbanden</td></tr>
<tr><td>6-1 recht evenredig</td><td>

- Twee variabelen heten recht evenredig als:
- Beide variabelen worden *k* keer zo groot

In formule: $y = c \times x$ of $c = \frac{y}{x}$ (rechte lijn)

×3 ×3 ×3 ×3

x	1	3	9	27
y	2	6	18	54

×3 ×3 ×3 ×3

- *C* = de evenredigheidsconstante
- De evenredigheidsconstante is gelijk aan de richtingscoëfficiënt

</td></tr>
<tr><td>6-2 omgekeerd evenredig</td><td>

- Twee variabelen heten omgekeerd evenredig als:
- De ene variabele *k* keer zo groot wordt en de andere variabele *k* keer zo klein wordt

In formule: $y = \frac{c}{x}$ of $x = \frac{c}{y}$ of $c = y \times x$

×3 ×3 ×3 ×3

x	1	3	9	27
y	25	5	1	0,2

:5 :5 :5 :5

</td></tr>
<tr><td>6-3 machtsverbanden</td><td>

In formule: $y = c \times x^a$

Vb:

x	2	8
y	10	32

$10 = c \times 2^a \rightarrow c = \frac{10}{2^a}$

$32 = c \times 8^a \rightarrow c = \frac{32}{8^a}$

GR: $y = \frac{10}{2^x}$ en $y = \frac{32}{8^x}$

Window: [0,2] × [0,6]

$a = 0{,}893$

c = 5,59

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>• Wetten van schaalvergroting: als de afmetingen van een figuur met k worden vermenigvuldigd, dan wordt de oppervlakte met k^2 en de inhoud met k^3 vermenigvuldigd</td></tr>
<tr><td>6-4 machts- of exponentieel verband</td><td>In formule: $y = b \times g^x$
Vb:
<table><tr><td>x</td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>y</td><td>10</td><td>32</td></tr></table>
$\frac{32}{10} = 3{,}2$ $g^b = 3{,}2$
$g = \sqrt[6]{3{,}2} \approx 1{,}214$
$y = b \times 1{,}214^x$
$10 = b \times 1{,}214^x$
$b = 6{,}8$
$y = 6{,}8 \times 1{,}214^2$</td></tr>
</table>